

Michelson-Interferometer (INT)

Themengebiet: Optik

1 Einleitung

Ein Michelson-Interferometer ist ein Präzisionsmessgerät, das bereits seit über 100 Jahren verwendet wird. Dafür wird eine in der Regel monochromatische Lichtwelle aufgeteilt und durch verschiedene optische Wege geleitet. Werden beide Wellen erneut überlagert, entsteht ein Interferenzmuster, mit dessen Hilfe kleine Längenänderungen im Nanometer-Bereich vergleichsweise einfach gemessen werden können.

Im Jahr 1881 konnte Albert A. Michelson mit einem solchen Aufbau die Existenz des Lichtäthers, der für die Ausbreitung des Lichtes postuliert wurde, widerlegen. 1887 entwickelte Michelson zusammen mit Edward W. Morley diesen Aufbau weiter, wodurch die Genauigkeit des Experiments weiter verbessert werden konnte. Durch die fortschreitende Weiterentwicklung der optischen Komponenten fanden Interferometer Einzug in immer mehr Präzisionsmesssystemen der Grundlagenforschung (z.B. zur Detektion von Gravitationswellen). Mit der Zeit verbreiteten sich interferometrische Messmethoden (z.B. zur präzisen Prozesskontrolle) auch in der Industrie.

In diesem Praktikumsversuch sollen verschiedene Anwendungsmöglichkeiten eines Michelson-Interferometers an Hand von einfachen Versuchen veranschaulicht werden.

2 Grundlagen

2.1 Zweistrahl Interferenz

Eine elektromagnetische Welle kann durch ihr Zeit t und Ort \vec{r} abhängiges elektrisches Feld $E(t, \vec{r})$ dargestellt werden. Der Einfachheit halber wird im Folgenden eine sich in z Richtung ausbreitende, monochromatische, ebene Welle betrachtet, die durch

$$E(t, z) = E_0 \cdot e^{i(\omega t + k \cdot z + \phi)} \quad (1)$$

beschrieben werden kann. Dabei ist E_0 die Amplitude der Welle, $\omega = 2\pi\nu$ die Kreisfrequenz mit der Schwingungsfrequenz ν , $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ die Wellenzahl mit der Wellenlänge λ und ϕ der Nullphasenwinkel der Welle. Der Zusammenhang von ω und k ist durch die vom Brechungsindex n abhängige Lichtgeschwindigkeit $c = \frac{c_0}{n}$ mit

$$\frac{\omega}{k} = \lambda \nu = c \quad (2)$$

gegeben.

Überlagern sich zwei Wellen kann die gesamte Amplitude durch Addition der beiden Einzelamplituden

$$E(t, z) = E_1(t, z) + E_2(t, z) \quad (3)$$

berechnet werden (Superposition). An einem festen Ort z führt der Summand $k \cdot z$ lediglich zu einer konstanten Phasenverschiebung und wird im Folgenden mit ϕ zu einer Konstante Φ zusammengefasst. Damit erhält man am festen Ort z aus Gleichung (1) und (3)

$$E(t) = E_{0,1} \cdot e^{i(\omega t + \Phi_1)} + E_{0,2} \cdot e^{i(\omega t + \Phi_2)}. \quad (4)$$

In Abbildung 1 ist exemplarisch für eine Phasenverschiebung $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ von π und 0 gezeigt, wie sich die gesamte Amplitude aus der Addition zweier Wellen ergibt.

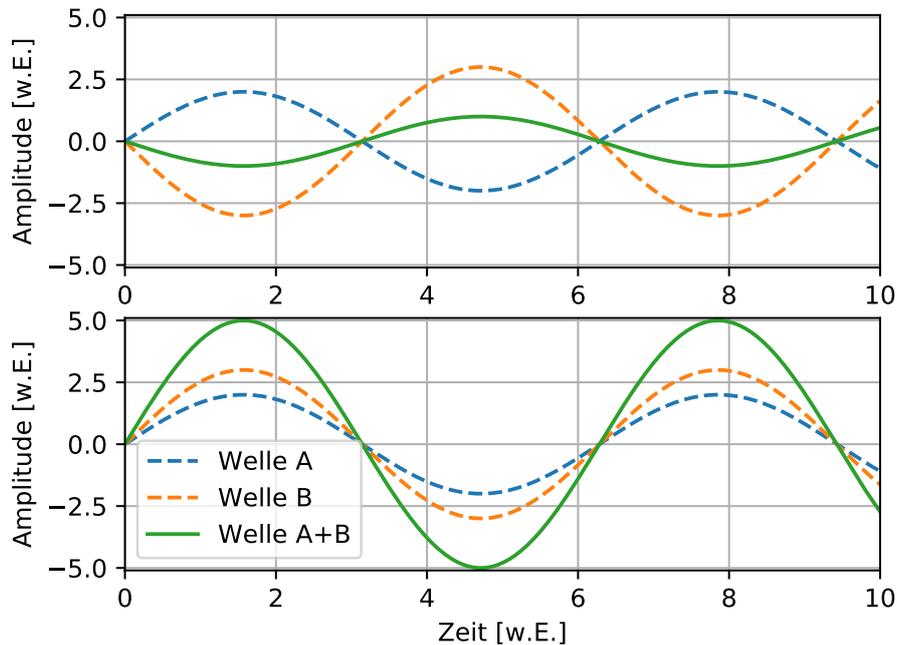


Abbildung 1: Zeitlicher Verlauf (in willkürlichen Einheiten) der Überlagerung zweier Wellen A und B mit unterschiedlichen Amplituden und der resultierenden gesamt Welle A+B im Fall von destruktiver Interferenz ($\Delta\Phi = \pi$) oben und konstruktiver Interferenz ($\Delta\Phi = 0$) unten. Die Intensität der gesamt Welle kann mit Gleichung 5 aus den Intensitäten und somit den Amplituden der Wellen A und B berechnet werden.

Da das zeitabhängige elektrische Feld von sichtbarem Licht mit einer Frequenz von 10^{14} Hz oszilliert, ist es nicht möglich dieses direkt zu beobachten. Messbar ist stattdessen die Intensität der Lichtwelle, die den mittleren Energiedurchgang pro Zeit- und Fläche beschreibt. Die Intensität einer Lichtwelle berechnet sich aus dem Betragsquadrat der Welle, also dem Produkt aus komplexer Welle und seinem komplex Konjugierten $E^*(t)$. Für zwei Wellen mit gleicher Frequenz ergibt sich somit

$$\begin{aligned} I &= E(t) \cdot E^*(t) \\ &= \left(E_{0,1} \cdot e^{i(\omega t + \Phi_1)} + E_{0,2} \cdot e^{i(\omega t + \Phi_2)} \right) \cdot \left(E_{0,1} \cdot e^{-i(\omega t + \Phi_1)} + E_{0,2} \cdot e^{-i(\omega t + \Phi_2)} \right) \\ &= E_{0,1}^2 + E_{0,2}^2 + E_{0,1} E_{0,2} \cdot (e^{i\Delta\Phi} + e^{-i\Delta\Phi}). \end{aligned}$$

Mit der Eulerschen Gleichung $\cos(\phi) = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})$ und dem Wissen, dass $I = E_0^2$ gilt, lässt sich dies zu

$$I = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\Phi) \quad (5)$$

umformen.

Betrachtet man Gleichung (5) ist es ersichtlich, dass die Intensität des Interferenzmusters um die mittlere Intensität $I_1 + I_2$ mit einer Amplitude von $2 \cdot \sqrt{I_1 I_2}$ oszilliert. Dabei wiederholt sich das Muster 2π -periodisch und es gilt mit der Ordnung des Maximums/Minimums $N \in \mathbb{Z}$

$$\Delta\Phi = N \cdot 2\pi \quad \text{für Maxima und} \quad (6)$$

$$\Delta\Phi = \left(N + \frac{1}{2}\right) \cdot 2\pi \quad \text{für Minima.} \quad (7)$$

Wird wie in diesem Versuch eine Lichtwelle aufgeteilt und mit sich selber zur Interferenz gebracht folgt $\Delta\Phi$ aus unterschiedlich langen optischen Weglängen der beiden Teilstrahlen. Die optische Weglänge s ergibt sich

aus dem Produkt von geometrischer Wegstrecke l und dem Brechungsindex n des Mediums in dem sich das Licht fortbewegt.

$$s = l \cdot n \quad (8)$$

Die Differenz der beiden optischen Weglängen wird Gangunterschied Δs genannt und lässt sich mit

$$\Delta s = \Delta\Phi \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \quad (9)$$

berechnen. Die Bedingung für Maxima und Minima verändert sich dadurch zu

$$\Delta s = N \cdot \lambda \quad \text{für Maxima und} \quad (10)$$

$$\Delta s = \left(N + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda \quad \text{für Minima.} \quad (11)$$

2.2 Kohärenz

Bisher wurden lediglich monochromatische Wellen betrachtet, die sich bis ins Unendliche Wellenförmig (Cosinusförmig) ausbreiten. Anders verhält es sich sobald reale Lichtwellen betrachtet werden. Durch die Unschärfe Relation besitzen selbst spektrale Emissionslinien eine endliche spektrale Bandbreite $\Delta\lambda$. Diese Bandbreite führt dazu, dass das Wellenpaket mit zunehmender Propagation „zerfließt“. Ist der Gangunterschied zweier interferierenden Lichtwellen größer als die so genannte Kohärenzlänge ist kein Interferenzmuster mehr sichtbar. Die Kohärenzzeit ist dabei die Zeit, die die Lichtwelle benötigt um die Kohärenzlänge zurückzulegen.

Die in diesem Versuch verwendeten Laser besitzen ausreichend gute Kohärenzeigenschaften, so dass Sie sich während des Versuchs darüber keine Gedanken machen muss.

2.3 Michelson-Interferometer

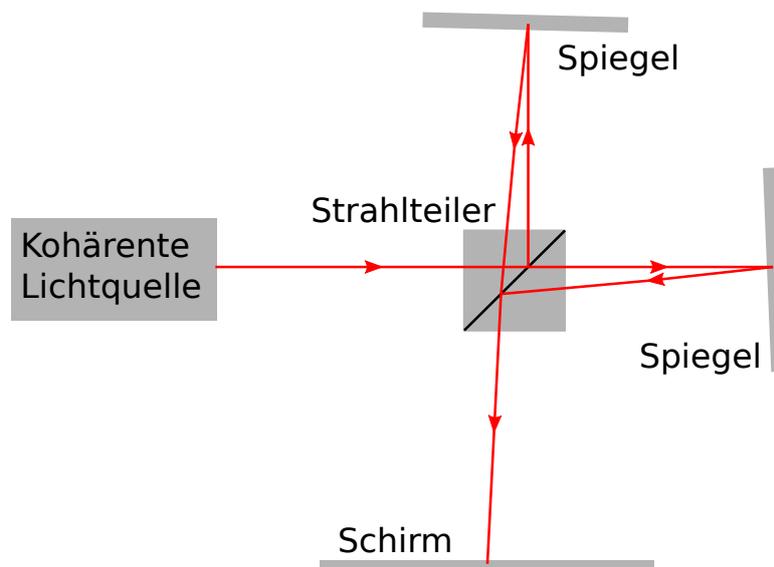


Abbildung 2: Schematischer Aufbau eines Michelson-Interferometers mit Strahlteiler, Spiegeln an den Enden der Strahlarme und einem Schirm auf dem das Interferenzmuster sichtbar wird.

In einem Michelson-Interferometer wird ein Lichtstrahl, der in der Regel eine große Kohärenzlänge besitzt, an einem Strahlteiler in zwei Teilstrahlen aufgeteilt. Beide Teilstrahlen werden von einem Spiegel auf den

Strahlteiler zurück reflektiert und durchlaufen dabei verschiedene optische Wege. Fasst man den Weg jeweils in Wegabschnitte l_i , die in Medien mit gleichem Brechungsindex n_i zurück gelegt werden, zusammen, kann man die optische Weglänge s eines Teilarms durch

$$s = \sum_i l_i \cdot n_i \quad (12)$$

ausdrücken. Vom Strahlteiler werden die beiden Teilstrahlen in Richtung Schirm (aber auch ein Teil zurück zur Lichtquelle) reflektiert. Dort kann das entstehende Interferenzmuster entweder mit bloßem Auge beobachtet oder mit einem Detektor gemessen werden. Der schematische Aufbau eines Michelson-Interferometers ist in Abbildung 2 dargestellt.

Der Gangunterschied der beiden Teilstrahlen ergibt sich aus der Differenz der beiden optischen Weglängen. Der Gangunterschied und somit das Interferenzmuster kann somit geändert werden, wenn entweder die geometrische Weglänge, oder der Brechungsindex in einem Wegabschnitt geändert wird. Damit erhält man

$$\Delta s = 2 \cdot \Delta l \cdot n \quad \text{bzw.} \quad (13)$$

$$\Delta s = 2 \cdot l \cdot \Delta n. \quad (14)$$

Der Faktor 2 folgt daraus, dass der Lichtstrahl in einem Michelson-Interferometer sowohl auf dem Hin- als auch auf dem Rückweg die geänderte optische Weglänge durchläuft.

3 Bestimmung von Brechungsindizes

Da das Auftreten von Maxima nach Gleichung (10) vom Gangunterschied und damit nach Gleichung (8) auch vom Brechungsindex eines von der Lichtwelle durchlaufenen Mediums abhängt, kann dieser mit einem Michelson-Interferometer bestimmt werden. Im Folgenden wird zunächst beschrieben wie der Brechungsindex von Gasen und anschließend der Brechungsindex von transparenten Medien bestimmt werden kann.

3.1 Druckabhängiger Brechungsindex von Gasen

Wie zuvor beschrieben hängt das am Schirm sichtbare Interferenzmuster vom Brechungsindex der Medien ab, die die beiden Lichtwellen durchlaufen. Der Brechungsindex ist ein Resultat der Wechselwirkung von elektromagnetischer Welle und den Elektronen in einem Medium und hängt daher stark von der Elektronendicht ab. In Gasen kann die Elektronendichte durch eine Änderung des Gasdrucks variiert werden, da der Druck direkt die Anzahldichte ρ_{Gas} der Atome/Moleküle beeinflusst. Man kann somit annehmen, dass

$$n - 1 \propto \rho_{\text{Gas}} = \frac{N_{\text{Gas}}}{V} \quad (15)$$

gilt, wobei N_{Gas} die Anzahl der Atome/Moleküle im Gasvolumen V ist. Aus der Zustandsgleichung für ideale Gase folgt zusätzlich

$$\frac{N_{\text{Gas}}}{V} = \frac{p}{k_B \cdot T}. \quad (16)$$

Dabei ist p der Gasdruck, T die Temperatur des Gases und k_B die Boltzmann-Konstante. Führt man Gleichungen (15) und (16) zusammen erhält man

$$n = 1 + \chi \cdot \frac{p}{T}. \quad (17)$$

Die Proportionalitätskonstante χ kann bei bekannter Temperatur aus der Steigung eines n-p-Diagramms bestimmt werden.

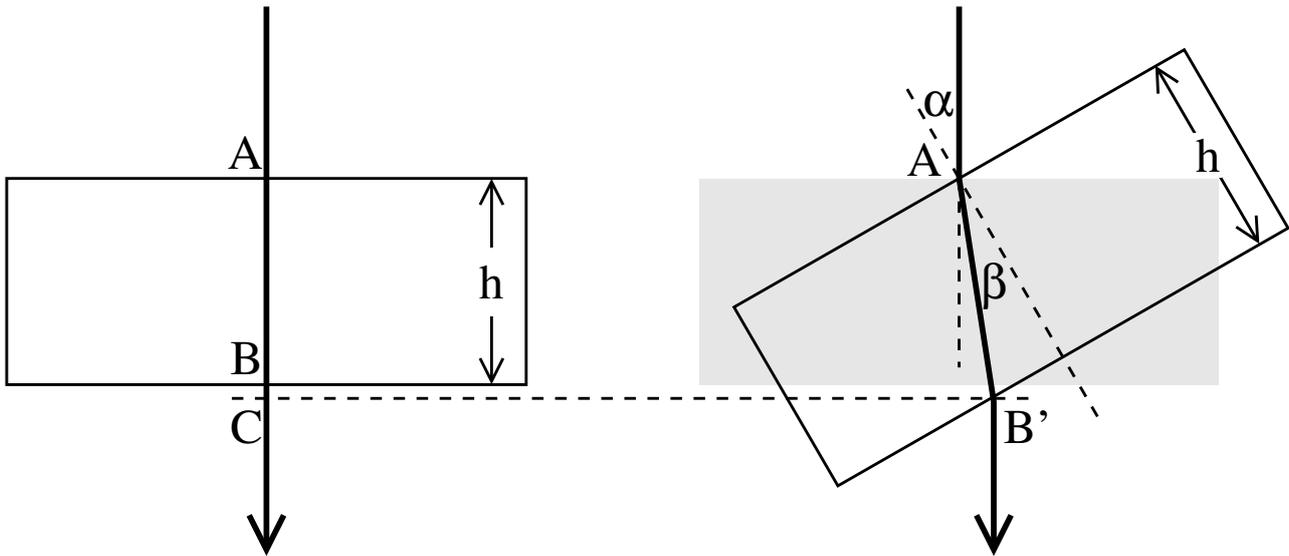


Abbildung 3: Durchgang eines Lichtstrahls durch einen transparenten Quader mit der Dicke h . Links ist der Durchgang bei senkrechtem Lichteinfall zu sehen. Auf der rechten Seite ist der Durchgang durch den Quader für den Einfallswinkel α dargestellt.

3.2 Brechungsindex transparenter Festkörper

Da die Dichte von Festkörpern in der Regel nicht einfach verändert werden kann, muss für die Bestimmung des Brechungsindex transparenter Festkörper eine andere Methode verwendet werden. Hierfür variiert man die effektive Dicke eines aus dem zu untersuchenden Material bestehenden Quaders, indem man ihn im Strahlengang des Interferometers dreht. Aus Abbildung 3 lässt sich der Gangunterschied zwischen dem senkrechten und dem um den Winkel α verkippten Einfall einer Lichtwelle auf einen transparenten Quader mit dem Brechungsindex n folgendermaßen bestimmen: mit der Annahme, dass der Brechungsindex von Luft $n_{Luft} \approx 1$ ist, erhält man für den Gangunterschied

$$\Delta s = 2 \cdot (n \cdot \overline{AB'} - n \cdot \overline{AB} - \overline{BC}). \quad (18)$$

Der Faktor 2 folgt erneut daraus, dass das Licht den Interferometerarm zweimal durchläuft. Des Weiteren ist die Strecke $\overline{AB} = h$ die Dicke des Quaders und die Strecke $\overline{AB'} = h / \cos(\beta)$ die geometrische Laufstrecke der Lichtwelle im Quader. Da der Austrittspunkt im verdrehten Quader näher zum Umlenkspiegel des Strahlarms liegt als beim senkrechten Einfall muss der Gangunterschied zusätzlich um die Strecke \overline{BC} , die bei senkrechtem Einfall in Luft zurück gelegt wird, korrigiert werden. Die Strecke \overline{BC} kann dabei über

$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \overline{AB'} \cdot \cos(\alpha - \beta) - \overline{AB} = h \cdot \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\beta)} - h \quad (19)$$

bestimmt werden. Der Winkel β ist mit dem Snelliusschen Brechungsgesetz

$$\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha)}{n} \quad (20)$$

bestimmbar. Daraus und aus Anwendung des Satzes von Pythagoras folgt zusätzlich

$$\cos(\beta) = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}}{n}. \quad (21)$$

Bringt man die Gleichungen (18) bis (21) zusammen und verwendet die Identität

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \quad (22)$$

erhält man für den Gangunterschied zwischen unverdrehtem und verdrehtem Quader

$$\Delta s = 2 \cdot h \cdot \left(1 - n - \cos(\alpha) + \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)} \right). \quad (23)$$

4 Versuchsdurchführung

4.1 Aufbau

Anmerkung: Der würfelförmige Strahlteiler ist bereits richtig montiert, so dass dessen Position am besten nicht verändert wird.

Zunächst muss das Michelson-Interferometer einjustiert werden. Schalten Sie zuerst den Laser an Ihrem Aufbau an. Bei den He-Ne-Lasern kann es ein paar Sekunden dauern bis der Laser zündet. Stellen Sie die ersten vier bereitliegenden optischen Spiegel so ein, dass der Strahl wie in Abbildung 4 gezeigt viermal umgelenkt wird und anschließend auf den würfelförmigen Strahlteiler fällt. Die auf dem optischen Tisch montierten Blenden helfen Ihnen dabei. Fein justieren Sie die vier Spiegel so, dass der Strahl den verschiebbaren Spiegel mittig trifft und auf dem Schirm ein quadratisches Abbild des Strahlteilers zu sehen ist.

Jetzt wird der fünfte optische Spiegel in den zweiten Strahlarm eingebaut und so eingestellt, dass der Strahl zurück zum Strahlteiler läuft. Danach sollte auf dem Schirm der Rand eines zweiten quadratischen Abbilds des Strahlteilers zu sehen sein. Durch fein justieren des fünften Spiegels werden die beiden Quadrate überlagert und es sollten feine Interferenzringe erscheinen. Justieren Sie so lange weiter, bis auf dem Schirm wie in Abbildung 4 rechts das Zentrum des konzentrischen Interferenzmusters zu sehen ist.

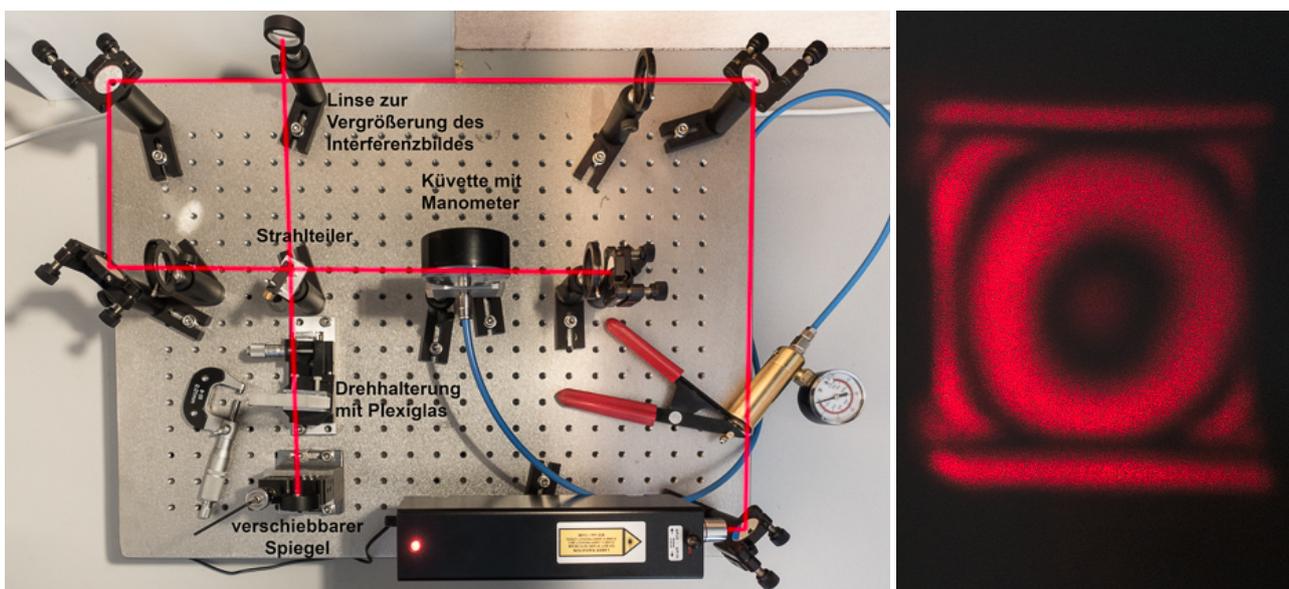


Abbildung 4: **Links:** Foto des verwendeten Aufbaus mit rot eingezeichnetem Verlauf des Lichtstrahls und allen im Verlauf des Praktikums verwendeten Gerätschaften. **Rechts:** Beispiel für das Interferenzmuster des fertig einjustierten Interferometers.

4.2 Bestimmung der Ganghöhe des verschiebbaren Spiegels

Bestimmen Sie zunächst die Ganghöhe der Schraube, mit der sich der verschiebbare Spiegel verfahren lässt. Die Ganghöhe ist der Abstand zwischen zwei Schraubenwindungen und somit die Distanz, die der Spiegel bei einer kompletten Umdrehung der Schraube zurücklegt.

- Lesen Sie dafür die Schrauben Position auf der Skala ab (eine Umdrehung entspricht 50 Skalenstrichen).
- Zählen Sie die Anzahl der erscheinenden/verschwindenden Interferenzmaxima (und/ oder -minima) während Sie die Schraube drehen.
- Bestimmen Sie 4 mal (jedes Teammitglied 2 Messungen) um wie viele Skaleneinheiten die Schraube verdreht werden muss bis 100 Interferenzmaxima oder -minima durchlaufen wurden.

Überlegen Sie sich außerdem welche zusätzlichen Größen Sie für die Auswertung benötigen.

4.3 Druckabhängiger Brechungsindex von Luft

Als nächste Messung wird der druckabhängige Brechungsindex der Luft bestimmt. Bauen Sie dafür wie in Abbildung 4 zu sehen eine Küvette in einen Arm des Interferometers. Die Küvette lässt sich über eine Handpumpe evakuieren, wodurch sich wie in Abschnitt 3.1 beschrieben der Brechungsindex im Inneren verändert.

Bestimmen Sie Druckänderung in Abhängigkeit der Zahl der erscheinenden/verschwindenden Interferenzmaxima oder -minima beim Abpumpen. Pumpen Sie dafür langsam die Luft aus der Küvette und lesen alle drei Maxima/Minima die aktuelle Druckdifferenz ab. Jedes Teammitglied führt die Messung einmal durch.

Überlegen Sie sich außerdem welche zusätzlichen Größen Sie für die Auswertung benötigen.

4.4 Brechungsindex von Plexiglas

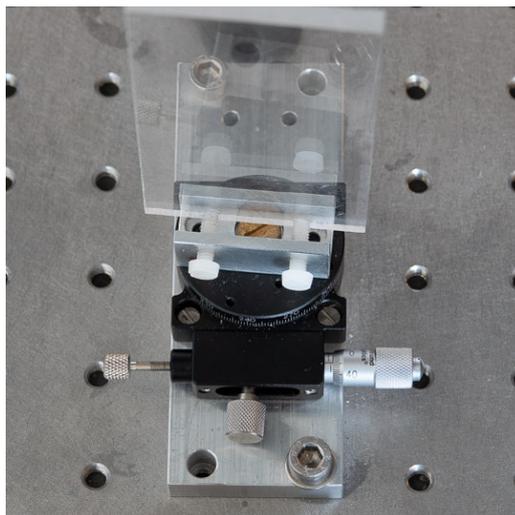


Abbildung 5: Darstellung des im Versuch verwendeten Drehtisches mit eingebauter Plexiglasplatte. Auf der rechten Seite ist die Mikrometerschraube zu sehen, mit der der Einfallswinkel des Lichtstrahls auf die Plexiglasplatte eingestellt werden kann. **Anmerkung:** Bitte verstellen Sie nichts an den beiden anderen sichtbaren Schrauben (unten und links).

Um den Brechungsindex einer Plexiglasplatte zu bestimmen wird wie in Abbildung 5 in einem der Interferometerarme ein planparalleler Plexiglasblock auf einem Drehtisch mit Hilfe von Kunststoff Schrauben befestigt. Überlegen Sie sich an Hand der Herleitung aus Abschnitt 3.2 zunächst wie eine Messreihe aussehen könnte, mit der der Brechungsindex bestimmt werden kann. Überlegen Sie sich außerdem wie Sie von der Stellung der Mikrometerschraube am Drehtisch auf den Winkel α schließen können.

Anmerkung: Bitte verstellen Sie nichts an den beiden in Abbildung 5 unten und links sichtbaren Schrauben.

Führen Sie anschließend eine Messung durch mit der Sie mittels einer Datenanpassung den Brechungsindex des Plexiglas bestimmen können. Überlegen Sie sich außerdem welche zusätzlichen Größen Sie für die Auswertung benötigen.

5 Auswertung

Gehen Sie zunächst kurz auf die grundlegenden Phänomene dieses Versuches ein. Gehen Sie außerdem auf alle in der Ausarbeitung verwendeten Gleichungen in einem kurzen Theorie Teil ein. Des weiteren:

- Berechnen Sie die Ganghöhe des verschiebbaren Spiegels
- Bestimmen Sie aus einem Δn über Δp Diagramm die Druckabhängige Steigung des Brechungsindex von Luft und geben Sie damit allgemein $n_{\text{Luft}}(p)$ an.
- Bestimmen Sie mit Hilfe Ihrer Messdaten den Brechungsindex der verwendeten Plexiglasplatte

Gehen Sie außerdem bei jeder der drei Aufgaben auf die Messunsicherheit ein und diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

Literatur

- [1] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*. 8th ed. Springer-Lehrbuch, 2018. ISBN: 9783662548462.
- [2] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 2 - Elektrizität und Optik*. 7th ed. Springer-Lehrbuch, 2017. ISBN: 9783662557891.
- [3] A. A. Michelson. "The relative motion of the Earth and of the luminiferous ether". In: *American Journal of Science* 22.128 (Aug. 1881), pp. 120–129. DOI: 10.2475/ajs.s3-22.128.120.